ЛЕКЦИОННЫЙ КОМПЛЕКС

Дисциплина: Прикладная математика

Код дисциплины: PM 1201

Название и шифр ОП: 6B07205 «Цифровой инжиниринг в фармацевтике и медицине»

Объем учебных часов /кредитов: 150/5

Курс и семестр изучения: 1,2

Объем лекции: 10

Шымкент, 2025

Лекционный комплекс разработан в соответствии с рабочей учебной программой дисциплины (силлабусом) «Прикладная математика» и обсужден на заседании кафедры

Протокол №11а «28» 05 2025 г.

Зав.кафедрой: ____________ Иванова М.Б.

Лекция №1

1. Тема: Определители второго порядка и их свойства
2. **Цель**: Объяснить студентам теорию определителей второго порядка и их свойства.
3. Тезисы лекции:
План лекции:
1.Введение в понятие определителя.
2.Свойства определителя.
В фармацевтической практике часто приходится иметь дело с неизвестными величинами, связанными между собой некоторыми заранее определенными зависимостями, которые могут быть выражены любыми формулами.
Если при этом выполняется ряд условий:
1) коэффициенты в формулах постоянные;
2) неизвестные входят в формулы только в первой степени;
3) отсутствуют произведения между самими неизвестными, тогда такие зависимости называют линейными.
Пример.
В лаборатории 10 образцов лекарственных форм, имеющие общий вес 280 г. Найти средний вес одного образца, если тара весит 15 г.
Чтобы найти средний вес образца, нужно составить уравнение: 10x+15=280,
обозначив за «x»-средний вес одного образца.
Решением составленного уравнения будет 26,5 г.
Пример.
В лаборатории 10 образцов, поступивших из 1 отдела, и 10 образцов, поступивших из 2-го отдела, которые имеют общий вес 280 г, а 5 образцов из первого набора и 2 образца из второго набора имеют общий вес 128 г. Найти средний вес образцов в каждом наборе.
Чтобы найти средний вес образца нужно составить два уравнения.
Обозначив за «x»- средний вес 1-образца, а за «y»- средний вес 2-образца, имеем: 10x+10y=280; 5x+2y=128, решая которые совместно, получаем x=24 г; y=4
В обоих рассмотренных примерах получили линейные зависимости:
в первом случае – линейное *уравнение*,
во втором – система линейных *уравнений*.
Заменим коэффициенты буквами и получим линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2, \end{cases}$$

где a11, a12, a21, a22, b1, b2, - некоторые числа, x, y- неизвестные.
Составим из коэффициентов системы прямоугольную таблицу вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

1. Любую такую прямоугольную таблицу, составленную из чисел называют матрицей.
2. Элементы a_{ij} из которых составлена матрица, называют элементами данной матрицы.
3. Определителем второго порядка или детерминантом, соответствующих матриц называется число D: $D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$
Определитель обозначается буквами D или Δ и записывается:

$$D = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Пример. Дана система уравнений: $\begin{cases} 2x+4y=3; \\ 8x-y=6. \end{cases}$

Составить матрицу системы и вычислить определитель.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Из коэффициентов системы составим матрицу и соответствующий ей детерминант: $\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}.$

Выполним вычисления: $\Delta=(-1)\times 2-(4\times 8)=-2-32=-34.$

Количество строк (или столбцов) в определителе называется порядком определителя.

Свойства определителя:

1. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2.$$

Заменим строки столбцами и снова вычислим получившийся определитель.

$$D^*=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2.$$

Операция замены строк столбцами (или наоборот) в определителе называется транспонированием.

2. При перестановке двух строк или столбцов определитель меняет свой знак.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-b_1a_2.$$

Поменяем в нем местами столбцы и вычислим получившийся определитель.

$$D=\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=b_1a_2-a_1b_2=-(a_1b_2-b_1a_2).$$

Поменяем теперь местами строки и вновь убедимся в справедливости данного свойства.

$$D=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=b_1a_2-a_1b_2=-(a_1b_2-b_1a_2)$$

3. Если все элементы какого-либо столбца (или строки) матрицы умножить (или разделить) на одно и то же число m, отличное от нуля, то определитель также умножится (разделится) на это число.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix};\cdots\cdots D_1=\begin{vmatrix} ma_1 & b_1 \\ ma_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ma_1 & mb_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=mD.$$

4. Определитель, у которого элементы одной строки (столбца) пропорциональны другой строке (столбцу), равен нулю.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & ra_1 \\ a_2 & ra_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ ra_1 & rb_1 \end{vmatrix}=0$$

5. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) можно представить как сумму двух слагаемых, то определитель будет равен сумме двух определителей. У первого из слагаемых определителей элементами соответствующей строки (столбца) будет первое слагаемое, а у

другого - второе. Остальные элементы этих определителей будут такие же, как у исходного.

$$D=\begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_3 \\ b_1+b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}=(a_1b_3-b_1a_3)+(a_2b_3-b_2a_3)=$$

$$=(a_1+a_2)b_3-(b_1+b_2)a_3.$$

6. Определитель не изменится, если к элементам какого-либо столбца(строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (строки), предварительно умноженные на какое-либо отличное от нуля число.

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1+b_1m & b_1 \\ a_2+b_2m & b_2 \end{vmatrix}.$$

4. **Иллюстративный материал**: Презентация, слайды.
5. Литература: см. приложение №1
6. **Контрольные вопросы** (обратной связи):
   1. Какая таблица называется матрицей?
   2.Чем отличается определитель от матрицы?

Лекция №2

1. **Тема:** Матрицы и операции над ними
2. **Цель:** Объяснить студентам нахождение матрицы и операции над ними.
3**. Тезисы лекции:**

План лекции:
1. Матрицы и их виды.
2. Определение ранга матрицы.
3. Операции над матрицами.

Матрицей «А» называется любая прямоугольная таблица, составленная из чисел a_{ij}, которые называют элементами матрицы и обозначается:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}).$$

Матрица, это любая прямоугольная таблица, составленная из *однородных* элементов.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}=\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\|.$$

Виды матриц:
1. Матрица - строка(или строковая матрица), состоящая из одной строки. Это прямоугольная матрица размером 1 x n. $A=a_{11}a_{12}...a_n$
2. Матрица – столбец (столбцевая матрица), состоящая только из одного столбца. Это также прямоугольная матрица размером m x 1 $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$
3. Матрица, состоящая из одного элемента. $A=(a_{11})1*1=a_{11}$

4. Нулевая матрица, состоящая из одних нулей, в матричной алгебре играет роль «0», обозначается «V».

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Единичная матрица, состоящая из нулей, кроме главной диагонали, на которой стоят единицы. Обозначается «E» и играет роль единицы в матричной алгебре.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Диагональная матрица, квадратная порядка «n», состоящая из нулей и на главной диагонали стоят не равные нулю элементы (не обязательно единицы).

$$E = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Важнейшей характеристикой *квадратной* матрицы является ее определитель или детерминант, который составляется из элементов матрицы и обозначается:

$$D_A = |A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

7. Если $det A \neq 0$ то матрица A называется невырожденной или не особенной. Если det A = 0 то матрица A называется вырожденной или особенной.

9. Две матрицы «A» и «B» называются равными и пишут «A = B», если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны, т.е.

$$A = B \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{m\times n}; B = (b_{ij})_{m\times n} \forall i,j : a_{ij} = b_{ij}.$$

Определение ранга матрицы:

Рассмотрим прямоугольную матрицу. Если в этой матрице выделить произвольно «n» строк и «m» столбцов, то элементы, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором k-го порядка матрицы «A». Матрица «A» обладает минорами любого порядка от «1» до наименьшего из чисел «m» и «n». Среди всех отличных от нуля миноров матрицы «A» найдется по крайней мере один минор, порядок которого будет наибольшим.

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется рангом матрицы.

Из определения ранга матрицы вытекает, что ранг любой прямоугольной матрицы не должен быть больше, чем минимальный размер матрицы.

Если матрица квадратная, то ранг не может быть больше, чем размер матрицы.

Если все элементы матрицы «A» равны нулю,

т. е. aij=0, то ранг этой матрицы тоже будет равен нулю r = RgA = 0.

Понятие ранга матрицы играет очень важную роль при построении графиков, при нахождении решения системы линейных уравнений, при переходе от одного базиса к другому, а также широко используется в прикладных исследованиях, особенно при обработке результатов

эксперимента, количественного определения качества предоставленной для изучения информации.
Всякий детерминант минора матриц «А», отличный от нуля, размер которого равен рангу этой матрицы, называется базисным минором. т.е. иными словами ранг матрицы «А» это наивысший отличный от нуля минор.

Пример. Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$

Решение. Так как в этой матрице только в одной строке есть отличные от нуля члены, то RgA=1.

Пример. Найти ранг матрицы: $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

Решение. Для проверки найдем детерминант этой матрицы: detA=7.
Он отличен от нуля, поэтому ранг матрицы равен 3, т.е. в матрице нет пропорциональных строк или столбцов.
Операции над матрицами:
Суммой двух матриц одинакового размера A = (aij) и B = (bij) называется матрица C = (Cij)=(aij+bij) или C = A + B.

Пример. Найти A + B, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

Решение.

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

Следствие:
A + B = B + A; (A + B) + C = A + (B + C).
2. Произведением матрицы A=(aij) на число «k» называется такая матрица C=(cij), у которой (cij) = (kaij).
Следствие: Для операции произведение матрицы на число справедливы следующие соотношения:
1.kA=Ak
2. k(A+B)=Ak+Bk

$$(k+\lambda)A = Ak + A\lambda$$

$$k(\lambda A) = \lambda kA = \lambda(kA)$$

3. Матрица «В», у которой все элементы равны элементам матрицы «А» по абсолютной величине, но имеют противоположные знаки по сравнению со знаками соответствующих элементов матрицы «А», называется противоположной матрице «А» и записывается: B=(-1)(aij).
Следствие: умножение любой матрицы на нулевую дает в результате нулевую матрицу:

$$\varnothing x A = \varnothing$$

Если А- квадратная матрица, то тогда также очевидно равенство

$det(\lambda A) = \lambda^n det A,$ где n- размер матрицы А.

4. Если матрицы A=(aij)mxp и B=(bij)pxn, то произведением матрицы «А» на матрицу «В» назовем матрицу «С», каждый элемент которой вычисляют по формуле:
C = AxB = (aij)mxpx (bij)pxn=(as1b1k+as2b2k+...+ askbsk)mxn=(cij)mxn
5. *Если* AB = BA, *то такие матрицы «*A» *и «*B» *называют* перестановочными *или*

коммутативными.
6. Если в некоторой матрице «А» поменять местами столбцы и строки, то полученная матрица будет называться транспонированной и обозначается «Ат».
7. Если выполняется равенство А = Ат, то такая матрица называется симметрической.
8. Обратной по отношению к матрице «А» называется такая матрица, для которой выполняется равенствоАА-1 = А-1А = Е
9. Матрица, которая имеет обратную называется обратимой или не особенной.
4. **Иллюстративный материал**: Презентация, слайды.
5. Литература: см. приложение №1
6. **Контрольные вопросы** (обратной связи):
1. Что называется матрицей?
2. Какие виды матрицы знаете?

Лекция №3

1. Тема: Система линейных алгебраических уравнений
2. Цель: Объяснить студентам теорию системы линейных алгебраических уравнений.
3. Тезисы лекции:
План лекции:
1. Основные определения систем линейных уравнений.
2. Решения систем линейных уравнений.
3. Виды систем линейных уравнений
Линейная система, составленная из «k» линейных уравнений относительно «n» неизвестных примет вид:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k \end{array}\right\}$$

где x1, x2, ..., xn- неизвестные; a11, a12, ..., akn- коэффициенты при неизвестных; b1, b2, ..., bk- свободные члены.
Решением системы таких уравнений называется совокупность из «n» чисел (c1, c2, ..., cn), которые подставлены в систему на место неизвестных x1, x2, ..., xn, обращают все уравнения системы в истинные равенства.
Примечание:
Не всякая система имеет решение. Поэтому, прежде чем начать решать составленную систему, необходимо выяснить, есть ли вообще решение.
2. Систему уравнений, имеющую хотя бы одно решение, называют совместной, а систему, не имеющую решений называют несовместной.
3. Решения $\left(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots c_n^{(1)}\right)$ и $\left(c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \ldots c_n^{(2)}\right)$ считают различными, если хотя бы одно из чисел $c_i^{(1)}$ не совпадает с соответствующим числом $c_i^{(2)}$.

Например, система $\left.\begin{array}{l} 3x_1 + 4x_2 = 0 \\ 6x_1 + 8x_2 = 0 \end{array}\right\}$

имеет различные решения $c_1^{(1)} = c_2^{(1)} = 0$ и $c_1^{(2)} = 4;\ c_2^{(2)} = -3$ Системы, имеющие хотя бы 2 различных решения, имеют бесконечное количество разных решений.

4. Если совместная система имеет единственное решение, то она называется определенной.
5. Если совместная система имеет по крайней мере два различных решения, то она называется неопределенной.
Решение системы линейных уравнений:
Чтобы выяснить имеет ли составленная система решение или нет, а, если имеет решение, то их количество, применяют:
1. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы, то такая система совместна и имеет хотя бы одно не нулевое решение.

Пример. Определить совместность системы $\left.\begin{matrix} 3x_1+4x_2=7 \\ 3x_1+4x_2=12 \end{matrix}\right\}.$

Решение. Составим матрицу системы $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$
и определим ее ранг т.е. число независимых строк или столбцов:
$rang\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = 1$

Составим расширенную матрицу системы $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{array}\right)$ и определим ее ранг (т.е. число независимых строк или столбцов: $rang\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 12 \end{array}\right) = 2$

Как видим, ранг обычной матрицы не равен рангу расширенной, следовательно, система несовместна, т.е. не имеет ни одно решения.
2. Если система имеет единственное нулевое решение, то такая система называется вырожденной.
3. Если система имеет количество уравнений меньшее, чем количество неизвестных, то такая система называется недоопределенной, а если количество уравнений больше, чем количество неизвестных, то –переопределенной.
4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.
5. Литература: см. приложение №1
6. **Контрольные вопросы (**обратной связи):
1. Какие уравнения называются линейными?
2. Когда система имеет хотя бы одно нулевое решение?

Лекция №4

1. **Тема**: Производная элементарной и сложной функций.
2. **Цель**: Объяснить студентам нахождение производных элементарных и сложных функций.
В чём заключается цель использования понятия производной и дифференциала в медицинских и фармацевтических отраслях?
Для определения процессов протекающих в живом организме, закона растворения лекарственных форм; обмена веществ, энергии и информации; теплообмена; скорости протекания химической реакции и других процессов необходимо понятие производной.
В чем смысл производной функции?
Пусть дана функция y=f(x). Для определения производной необходимо:
1. Независимый аргумент “x” получает приращение Δx.
2. Соответственно функция y=f(x) получает приращение Δy, т.е. y+Δy=f(x+Δx).
3. Определяется приращение функции: Δy=f(x+Δx)-f(x).

4. Определяется отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

5. Определяется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю, при условии, что этот предел существует, называется производной функции в точке.

Основные правила определения производной функции

1. Производные суммы или разности двух функций равна сумме или разности производных этих функций: $(u \pm v)'_x = u'_x \pm v'_x$.

2. Производная произведения двух функций равна сумме произведений второй функций на производную первой и первой функции на производную второй:

$$(uv)'_x = u'_x v + u v'_x$$

3. Производная частного двух функций равна дроби, знаменатель которого равен квадрату знаменателя функции. А числитель есть разность между произведениями знаменателя на производную числителя и числителя на производную знаменателя: $(\frac{u}{v})'_x = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2}$.

Элементарной называют функцию, которая зависист только от одного аргумента: y=f(x).

Сложной называют функцию, которая зависит от нескольких аргументов: z=f(u), u=φ(x) или z=f(φ(x)).

Производная сложной функции определяется производной данной функции «z» по промежуточному аргументу «u», умноженной на производную самого промежуточного аргумента «u» по независимой переменной «x».

Таблица основных формул определения производной

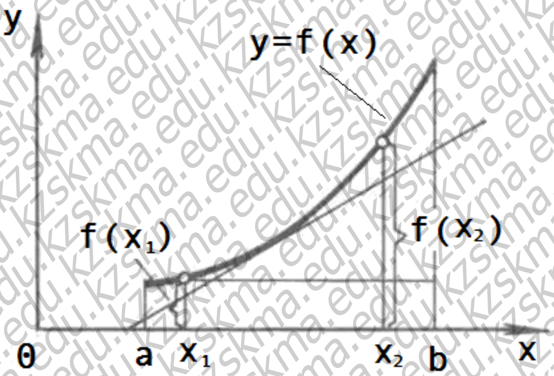
Элементарные функции	Сложные функции
1. $(C)'_x = 0.$ 2. $(Cx)'_x = C(x)'_x.$ 3. $(x)'_x = 1.$	
4. $(x^n)' = nx^{n-1};$	$(u^n)' = nu^{n-1}u'_x$
5. $(a^x)'_x = a^x \ln a.;$	$(a^u)'_x = a^u u'_x \ln a.$
6. $(e^x)'_x = e^x;$	$(e^u)'_x = e^u u'_x.$
7. $(\log_a x)'_x = \frac{1}{x\ln a};$	$(\log_a u)'_x = \frac{u'_x}{u\ln a}.$
8. $(\lg x)'_x = \frac{1}{x}0,4343;$	$(\lg u)'_x = \frac{u'_x}{u\ln 10} \approx \frac{u'_x}{u}0,4343$

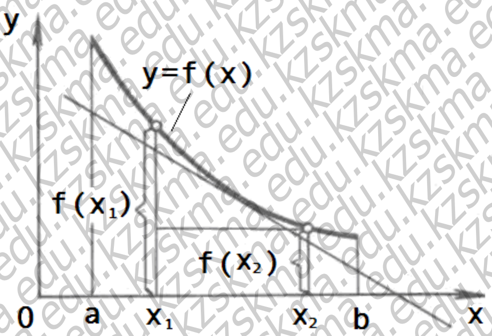
Элементарные функции	Сложные функции
9. $(\ln x)'_x = \frac{1}{x}$;	$(\ln u)'_x = \frac{u'_x}{u}$.
10. $(\sin x)'_x = \cos x$;	$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x$
11. $(\cos x)'_x = -\sin x$;	$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x$
12. $(tgx)'_x = \frac{1}{\cos^2 x}$,	$(tgu)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} u'_x$
13. $(ctgx)'_x = -\frac{1}{\sin^2 x}$,	$(ctgu)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} u'_x$
14. $(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arcsin u)'_x = \frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$
15. $(\arccos x)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$(\arccos u)'_x = -\frac{u'_x}{\sqrt{1-u^2}}$

Элементарные функции	Сложные функции
16. $(arctgx)'_x = \frac{1}{1+x^2}$;	$(arctgu)'_x = \frac{u'_x}{1+u^2}$
17. $(arcctgx)'_x = -\frac{1}{1+x^2}$;	$(arcctgu)'_x = -\frac{u'_x}{1+u^2}$

Исследование функций с помощью производных основано на связи, существующей между поведением функции и свойствами ее производных.

Функция f(x) называется возрастающей на интервале]a, b[, если для любых двух точек «x1» и «x2» из этого интервала из неравенства x2> x1 следует неравенство f(x2)≥f(x1). Если из неравенства x2> x1 следует строгое неравенство f(x2)>f(x1), то функция f(x) называется строго возрастающей.





Функция f(x) называется убывающей на интервале]a, b[, если для любых двух точек «x1» и «x2» из этого интервала из неравенства x2> x1 следует неравенство f(x2)≤f(x1). Если из неравенства x2> x1 следует строгое неравенство f(x2)<f(x1), то функция f(x) называется строго убывающей.

Строго возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Примером монотонной функции может служить концентрация лекарственного препарата в крови.

При однократном введении лекарственного препарата концентрация его в крови с течением времени является убывающей функцией.

При непрерывном внутрисосудистом введении препарата с постоянной скоростью изменение концентрации в крови с течением времени является возрастающей функцией.

Существуют и немонотонные функции. Например, температура воздуха в течение недели - немонотонная функция, хотя на протяжении нескольких часов она может быть монотонной, повышаясь к полудню или понижаясь к вечеру.

Необходимые условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале:

1. Если дифференцируемая функция f(x) возрастает на интервале]a, b[, то в любой точке «x» этого интервала f '(x)≥0.
2. Если дифференцируемая функция f(x) убывает на интервале]a, b[, то в любой точке «x» этого интервала f '(x)≤0.
3. Если дифференцируемая функция f(x) на интервале]a, b[не изменяется (есть постоянная), то ее производная f '(x) = 0.

Достаточные условия возрастания и убывания дифференцируемой функции на интервале

1. Если производная f '(x) функции f(x) на интервале]a, b[положительна, то функция f(x) на этом интервале строго возрастает.
2. Если производная f'(x) функции f(x) на интервале]a, b[отрицательна, то функция f(x) на этом интервале строго убывает.
3. Если производная f'(x) функции f(x) на интервале]a, b[равна нулю, то функция f(x) на этом интервале не изменяется.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чем смысл производной функции?
2. Чем отличается производная элементарной функции от сложной?
3. Для какой цели используются производные функции в фармацевтике?
4. в каком случае функция строго убывает?
5. условия необходимого прироста и убывания функции.

Лекция №5

1. Тема: Дифференциал функции.

2. Цель: Объснить студентам понятие дифференциала функции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Связь дифференциала функции с производной.
2. Свойства дифференциала.
3. Таблица дифференциалов функций.

В чем отличие дифференциала от производной функции?

Из определения производной следует: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$

Если заменить предел производной положительной очень малой величиной «α», тогда получается: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$

Второе слагаемое по величине на степень меньше, поэтому стремится к нулю.

$\alpha \cdot \Delta x \to 0$

В таких случаях для приблизительного вычисления приращение «Δ» заменяется на «d»: $\Delta \approx d \;\; dy = y'dx + 0$

Главная линейная часть приращения называется дифференциалом функции. $dy = y'dx$

Дифференциал функции используется для приближенных вычислений.

Как определяется дифференциал функции?

Чтобы определить дифференциал функции, необходимо определить первую производную данной функции и умножить её на дифференциал независимого аргумента.

Пример. Дана функция: y=2x3-4x+5 Найти дифференциал функции:

dy=(y)'dx=(2x3-4x+5)'dx=(6x2-4)dx.

Свойства дифференциала:

1. Дифференциал постоянной величины равен нулю: y = c, где c- постоянная величина, y' = 0, dc =0

2. Дифференциал алгебраической суммы и разности нескольких функций равен алгебраической сумме и разности дифференциалов этих функций:

в(г + м - ц) = вг + вм - вцю

3. Постоянный множитель выносится за знак дифференциала без изменений: d(cu) = c du

4. Дифференциал произведения двух сомножителей равен произведению первого сомножителя на дифференциал второго плюс произведение второго сомножителя на дифференциал первого: d (uv) = u dv + v du

5. Дифференциал частного равен дроби, числитель которой есть произведение знаменателя дроби на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, а знаменатель есть квадрат знаменателя дроби: $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}$

6. Дифференциал сложной функции (y=f(u), u=g(x) - функции от функции) равен произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на дифференциал этого промежуточного аргумента: df(u) = f '(u)du

Таблица дифференциалов функций:

$$1.\ dx^n = nx^{n-1}dx.$$

$$2.\ da^x = a^x \ln a dx.$$

$$3.\ d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}.$$

$$d(\ln x) = \frac{dx}{x}.$$

$$4.\ d(\sin x) = \cos x dx.$$

$$5.\ d(\cos x) = -\sin x dx.$$

$$6.\ d(tgx) = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

$$7.\ d(ctgx) = -\frac{dx}{\sin^2 x}.$$

$$8.\ d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$9.\ d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10.\ d(arctgx) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$11.\ d(arcctgx) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

$$12.\ df(u) = f'(u)du$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чем отличие дифференциала от производной функции?
2. Как определяется дифференциал функции?

Лекция №8

1. Тема: Исследование функции при помощи применения производной: возрастание и убывание функции в заданном промежутке.Построение график функции

2. Цель: Объяснить студентам построение графика с использованием исследования функции.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Алгоритм построения графика функции.
2. Построение графика функции на примере.

Алгоритм построения графика функции:

1. Найти область определения функции.
2. Установить, обладает ли функция симметрией (исследовать функцию на четность).
3. Исследовать функцию на непрерывность, периодичность.
4. Рассмотреть поведение функции в окрестностях точек разрыва.
5. Определить поведение функции в бесконечности.
6. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Найти интервалы возрастания и убывания и точки экстремума функции.
8. Определить точки перегиба.
9. Определить интервалы выпуклости и вогнутости.
10. Составить сводную таблицу и построить график функции.

Построение графика функции на примере: y = x3 - 3x

1. Функция определена при всех x €]-∞, + ∞[.
2. Определим интервалы возрастания и убывания функции:

Определить первую производную: f '(x) = 3x2 – 3.

Возрастание функции на интервале: если f '(x)>0. В данном случае f '(x) = 3x2 - 3 > 0, если x2> 1, или |x| > 1.

Следовательно, функция y = x3 - 3x возрастает на интервалах]-∞, -1[и]1, + ∞[.

Убывание функции на интервале: если f '(x)<0.

В данном случае f '(x) = 3x2 - 3 < 0, откуда x2 <1, или -1< x <1.

Следовательно, функция y = x3 - 3x убывает на интервале]-1,1[.

3. Определим критические точки и исследуем их характер:

Приравнивая первую производную к нулю (f '(x) = 3x —3 = 0) найдем критические точки: x1 = -1, x2= 1.

Определим знак первой производной в окрестностях точек x1 = -1 и x2 = 1.

Для точки x1 = -1: f '(-2) = 3(-2)2 -3 = 9 > 0. Следовательно, x1 = «-1» - точка максимума. Максимум функции f(-1) = (-1)3 - 3(-1) = 2. Для точки x2 =1: f '(0)=3(0)2 – 3 = -3 < 0. Следовательно, x2 = «1» - точка минимума. Минимум функции f(1)= (1)3 - 3(1) = - 2

4. Определим точку непрерывной кривой, отделяющая участок выпуклости от участка вогнутости (участок вогнутости от участка выпуклости), называемой точкой перегиба: Определим вторую производную: f ''(x) = 6x = 0, Абсцисса точки перегиба при x = 0 = 0. Ордината точки перегиба f(0) = 03 - 3 • 0 = 0. Координаты точек перегиба O(0; 0).

5. Определим интервалы выпуклости и вогнутости: Кривая выпукла при условии f ''(x) = 6x < 0, откуда x<0. Следовательно, кривая выпукла на интервале]-∞, 0[. Кривая вогнута при условии f ''(x) = 6x > 0, откуда x > 0. Следовательно, кривая вогнута на интервале]0, +∞[. 6. Найдем точки пересечения кривой с осью Ox:

Составим систему уравнений $\left.\begin{aligned} y = x^3 - 3x \\ x = 0 \end{aligned}\right\}$

и находим точки пересечения кривой с осью Ox:

Подставляя значения x=0 в систему, находим значения y=0.

Координаты точек пересечения кривой с осью Ox: O(0; 0).

7. Найдем точки пересечения кривой с осью Oy:

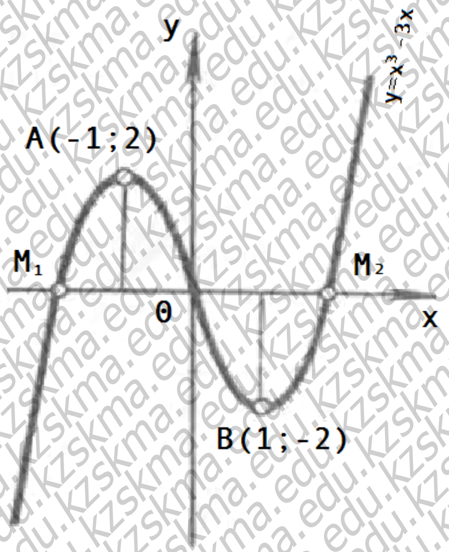
Составим систему уравнений $\left.\begin{matrix} y = x^3 - 3x \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$

и находим точки пересечения кривой с осью Оу и подставляя значения y=0 в систему, находим значения: x1= 0; x2= √3; x3= -√3

Координаты точек пересечения кривой с осью Оу: M1(-√3; 0); M2(√3; 0).

9. Сведем результаты исследования в таблицу:

x	-1	0	1	-√3	√3
f(x)	2	0	-2	0	0
f '(x)	0	-3	0		
f ''(x)	-6	0	+6		
Характер точки	max	перегиб	min		



10. Построим график функции y=x3-3x:

Координаты всех точек:

1. O(0; 0) - точка перегиба.
2. A(-1; 2) – точка max.
3. B(1; -2) – точка min.
4. O(0; 0) - точка пересечения кривой с осью Ох.
5. M1(-√3; 0); M2(√3; 0) - точки пересечения кривой с осью Оу.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. Из каких последовательностей состоит построения графика функции?
2. Какая точка называется точкой перегиба?

Лекция №7

1. Тема: Неопределенный интеграл. Основные свойства неопределенного интеграла. Методы вычисления неопределенного интеграла

2. Цель: Дать понятие неопределенного интеграла.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Связь дифференциала функции с производной.
2. Свойства дифференциала.
3. Таблица дифференциалов функций.
4. Методы вычисления неопределенного интеграла.

В чём отличие неопределенного интеграла от дифференциала функции?

С помощью дифференциала определяется измененный вид функции, а с помощью интеграла можно определить первоначальный вид это функции или первообразной функции. Совокупность первообразных: F(x)+C для данной функции или данного дифференциала f(x)dx называют неопределенным интегралом от функции и обозначают: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Где: $\int$ - обозначение неопределенного интеграла, x – независимый аргумент, f(x) – подинтегральная функция, f(x)dx – подинтегральное выражение, F(x) – первообразная функции, C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x)$$

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению: $d\int f(x)dx = f(x)dx$

3. Интеграл от дифференциала первообразной функции равен самой первообразной функции и произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x) + C$

4. Постоянный множитель «k» выносится за знак неопределенного интеграла без изменений: $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

5. Интеграл от алгебраической суммы или разности конечного числа функций равен алгебраической сумме или разности интегралов от слагаемых:

$$\int\left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

Основные формулы интегрирования:

1. $\int dx = x + C.$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; (n \neq -1).$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

5. $\int e^x dx = e^x + C.$

6. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

12. $\int tgxdx = -\ln|\cos x| + C.$

13. $\int ctgxdx = \ln|\sin x| + C.$

Методы вычисления неопределенных интегралов:

Непосредственное интегрирование:

Этот метод используется в тех случаях, когда для интегрирования подинтегральной функции используются либо основные свойства интегрирования, либо функция приводится к табличным интегралам.

$$1. \int(5x^2 + 2x - 3)dx = 5\int x^2dx + 2\int xdx - 3\int dx = 5\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} - 3x + C = \frac{5}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$$

$$2. \int(x^4 + 7^x)dx = \int x^4dx + \int 7^x dx = \frac{x^5}{5} + \frac{7^x}{\ln 7} + C$$

2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной):

Этот метод используется в тех случаях, когда подинтегральная функция $\int f(x)dx$ имеет сложный аргумент. Для вычисления сложная часть аргумента заменяется $x = \varphi(t)$ более элементарной функцией. Тогда новая функция записывается в виде:

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$. Эта формула называется формулой метода интегрирования подстановкой или заменой переменной.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \left| \begin{array}{l} 2x+3=t \\ d(2x+3)=dt \\ 2dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = t^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C \qquad 3.$$

Интегрирование по частям:

Этот метод используется в тех случаях, когда подинтегральная функция задана в виде произведения двух разных функций: u = u(x)   и   v = v(x).

Если эти функции диффиренцируемы, то d(uv)=vdu+udv, откуда udv=d(uv)-vdu. Интегрируя обе части данного выражения, получаем формулу интегрирования по частям: $\int udv = u \cdot v - \int vdu$

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu \qquad \int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u=x \\ du=dx \\ d\vartheta = \ell^x dx \\ \int d\vartheta = \int \ell^x dx \\ \vartheta = e^x + c; c=0 \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = e^x(x-1)+c$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. В чём отличие неопределенного интеграла от дифференциала функции?
2. Какие знаете основные свойства неопределенного интеграла?
3. Методы интегрирования.

Лекция №8

1. Тема: Определенный интеграл. Основные свойства определенного интеграла и методы вычисления. Применение определенного интеграла

2. Цель: Дать понятие определенного интеграла.

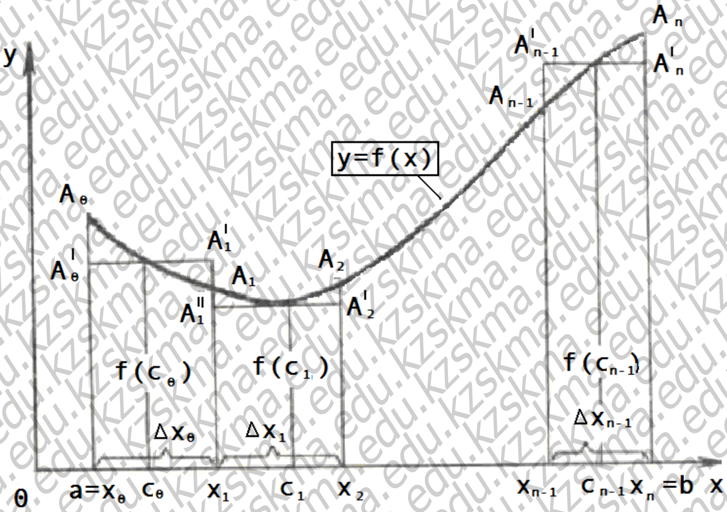
3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Определенный интеграл.
2. Основные свойства определенного интеграла.
3. Связь между неопределенным и определенным интегралом.
4. Методы интегрирования.
5. Вычисление площади плоских фигур.
6. Работа с переменной силой

Понятие определенного интеграла широко используется в математике, фармации, инженерных технологиях и прикладных науках. С его помощью вычисляют площади, ограниченные кривыми, длины дуг, объемы тел произвольной формы, работу переменной силы, скорость, путь, моменты инерции тел и т. д.

Рассмотрим задачу по определению площади криволинейной трапеции, приводящую к понятию определенного интеграла.



Фигура, ограниченная кривой y = f(x), отрезком [a, b] оси Ox и прямыми x = a и x = b, называется криволинейной трапецией.

Предположим, что f(x)>0 на отрезке [a, b], т. е. криволинейная трапеция расположена над осью Ox. Для вычисления площади «S» данной криволинейной трапеции разобьем отрезок [a, b] произвольным образом на «n» частей и обозначим точки деления: a = x0 < x1 < x2 < ... < xn-1 < xn = b.

Проведя из этих точек перпендикуляры до пересечения с кривой, получим значения функции в этих точках: y= f(x0); y1= f(x1); y2= f(x2);…; yn-1= f(xn-1); yn= = f(xn). В результате этого площадь криволинейной трапеции окажется разбитой на сумму площадей «n» элементарных криволинейных трапеций

На отрезках Δx0, Δx1,… Δxn-1 возьмем совершенно произвольные точки c0, c1, c2,… cn-1 и проведем перпендикуляры из этих точек до пересечения с кривой y=f(x). Получим f(c0), f(c1), f(c2),… f(cn-1). Далее построим ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, имеющих своим основанием отрезки Δx0, Δx1,… Δxn-1, а высотой - ординаты f(c0), f(c1), f(c2),… f(cn-1).

Эта фигура ограничена ломаной линией A0' A1' A1''A2' … An'. Площадь «Sn» полученной ступенчатой фигуры зависит от числа «n» и длины отрезков Δxi (i = 0,1,2,…,n-1). При неограниченном увеличении числа «n» и уменьшении максимального отрезка Δxi площадь «Sn» ступенчатой фигуры будет приближаться к площади трапеции «S», т.е. площадь криволинейной трапеции следует называть пределом, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры. Площадь «Sn» равна сумме площадей прямоугольников, построенных на отрезках: Sn = f(c0) Δx0 + f(c1) Δx1 +…+ f(cn-1) Δxn-1= $= \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(\Delta x_i).$

Если неограниченно увеличивать число «n» частей разбиения так, чтобы длина наибольшего из отрезков «Δxi» стремилась к нулю, то площадь криволинейной трапеции будет равна пределу суммы, каждое слагаемое которой равно произведению значения функции в точке отрезка f(ci) на величину этого отрезка «Δxi»: $S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(\Delta x_i).$

Эта сумма называется интегральной суммой для функции y = f(x) на отрезке [a, b].

Если существует конечный предел интегральной суммы, то этот предел называют определенным интегралом от функции f(x) на отрезке [a, b] и обозначают:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(\Delta x_i).$$

Где, f(x) - называется подынтегральной функцией, «x» — переменной интегрирования, числа «a» и «b» - нижним и верхним пределами интегрирования.

Определенный интеграл есть число, его значение зависит от вида функции *f(x)* и значений верхнего и нижнего пределов. Площадь криволинейной трапеции численно равна интегралу от функции, ограничивающей трапецию, взятому по основанию [a, b]: $S=\int_a^b f(x)dx.$

С помощью определенного интеграла решаются задачи из любой области науки и техники, если их решение сводится к нахождению существующего предела интегральной суммы.

Основные свойства определенного интеграла

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(u)du=...$

2. Определенный интеграл от суммы непрерывных функций f1(x), f2(x), ... , fn(x), заданных на отрезке [a, b], равен сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x))dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+...+\int_a^b f_n(x)dx$$

3. Постоянный множитель «k» подынтегральной функции можно выносить за знак определенного интеграла: $\int_a^b k\ f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

4. Если верхний и нижний пределы интегрирования поменять местами, то определенный интеграл изменит свой знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

5. Если пределы интегрирования равны между собой (b = a), то определенный **интеграл равен нулю:** $\int_a^b f(x)dx=0$

6. $\int_a^b dx=b-a$

7. Если существуют интегралы, $\int_a^c f(x)dx\ и\ \int_c^b f(x)dx$ **то существует интеграл** $\int_a^b f(x)dx$ для любого взаимного расположения точек «a», «b», «c»: $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

8. Если подынтегральная функция на отрезке интегрирования сохраняет постоянный знак, то интеграл представляет собой число того же знака, что и функция: если f(x)≥0, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

Общность обозначения определенного и неопределенного интегралов подчеркивает тесную связь между ними, хотя определенный интеграл выражает число, а неопределенный интеграл - совокупность первообразных функций.

Связь между определенным и неопределенным интегралами устанавливает формула Ньютона — Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Значение определенного интеграла равно разности значений любой первообразной от подынтегральной функции, взятой при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Методы вычисления определенных интегралов

Непосредственное интегрирование:

Этот метод используется в тех случаях, когда для интегрирования подинтегральной функции используются либо основные свойства интегрирования, либо функция приводится к табличным интегралам.

$$\int_1^2 (2x+3)dx = \int_1^2 2xdx + \int_1^2 3dx = 2\int_1^2 xdx + 3\int_1^2 dx = 2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3x\Big|_1^2 = (2^2 - 1^2) + 3(2-1) = 6$$

2. Интегрирование подстановкой (заменой переменной):

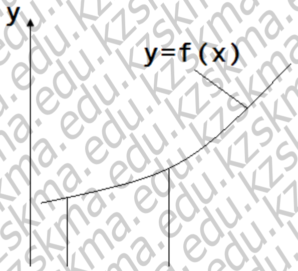
Этот метод используется в тех случаях, когда подинтегральная функция имеет сложный аргумент.

Для вычисления сложная часть аргумента заменяется более элементарной функцией.

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} = \left| \begin{array}{c} 4-x=t \\ d(4-x)=dt \\ dx=-dt \\ t_1=4 \\ t_2=2 \end{array} \right| = -\int_4^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\int_4^2 t^{-\frac{1}{2}}dt = -2\sqrt{t}\Big|_4^2 = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{4} = -2\sqrt{2} + 4 = 1{,}18$$

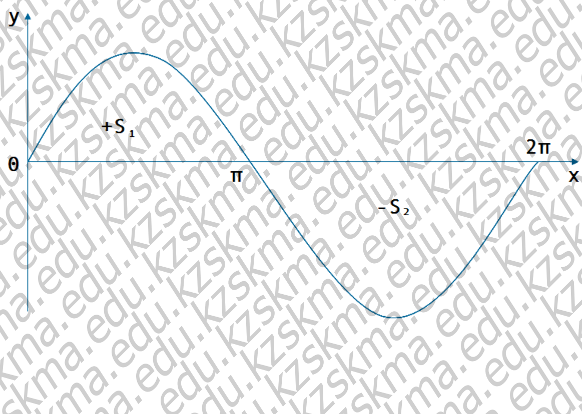
Вычисление площадей плоских фигур

Функция y = f(x) непрерывна на отрезке [a, b].



Если f(x)>0, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями y=f(x), y=0, x=a, x=b, численно равна интегралу: $S = \int_a^b f(x)dx.$

Пример. Определить площадь плоской фигуры, ограниченной синусоидой y = sin x и осью Ox при условии 0≤x ≤2π.



Решение: Разобьем отрезок [0, 2π] на два отрезка [0, π] и [π, 2π]. На отрезке [0, π] sin x≥0 следовательно:

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin xdx = -\cos x\Big|_0^{\pi} =$$

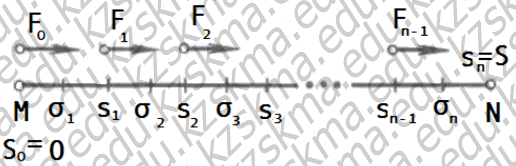
$$= -(\cos\pi - \cos 0) = 2 кв.ед.$$

На отрезке [π, 2π] sin x≤0, следовательно:

$$S_2 = \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = \left|-\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right| = \left|-(\cos 2\pi - \cos\pi)\right| = 2\,кв.ед.$$ Искомая площадь S = S1 + S1 = 2 + 2 = 4 кв.ед.

Работа переменной силы

Тело движется по прямой «MN» под действием переменной силы F=f(s). Направление силы совпадает с направлением движения. Требуется определить работу, производимую силой при перемещении тела из положения «M» в положение «N». Разобьем путь «MN» точками s0=0, s1, s2, …, sn-1, sn = S на «n» элементарных отрезков. В каждом элементарном отрезке выберем точку σi (i=0, 1, 2, …, n) при этом, сила f(σi) на каждом элементарном отрезке постоянна. Тогда произведение f(σi) Δsi будет приближенно равно работе силы на пути Δsi.



$$A = \lim_{\max \Delta s_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i)\Delta s_i = \int_0^S f(S)ds$$

$$или \quad A = \int_0^S f(S)ds$$

Сумма работ на элементарных отрезках:

Пример:

Вычислить работу, совершенную одним молем идеального газа при обратимом изотермическом расширении от 2,24 · 10-3 до 22,4 · 10-3 м3 при t = 0°С.

Решение.

При обратимом расширении одного моля идеального газа давление p = RT/V. Совершаемая газом при изменении объема на величину dV элементарная работа dA = pdV. Полная работа расширения газа от начального объема V1 до конечного объема V2.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pbV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V} dV = RT \ln V\Big|_{V_1}^{V_2} = RT \ln \frac{V_2}{V_1} = 8{,}32 \cdot 273 \ln \frac{22{,}4 \cdot 10^{-3}}{2{,}24 \cdot 10^{-3}} = 5{,}23\,кДж.$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы (обратной связи):

1. От чего зависит площадь ступенчатой фигуры?
2. Какая сумма называется интегральной суммой?
3. Что называют определенным интегралом?
4. Какие основные свойства определенного интеграла вы знаете?
5. Как определяется величина заданного интеграла?
6. Как определяется площадь плоских фигур?

Лекция №9

1. Тема: Дифференциальные уравнения первого, второго порядка и их виды.

2. Цель: Объяснить студентам теорию дифференциальных уравнений первого порядка.

3. Тезисы лекции:

План лекции:

1. Понятие дифференциальных уравнений.
2. Общее и частное решения дифференциальных уравнений.
3. Виды дифференциальных уравнений первого порядка.
4. Дифференциальные уравнения второго порядка допускающие понижение порядка.

5. Не содержащие искомой функции и ее производной.
6. Не содержащие искомой функции.
7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

В чём отличие дифференциальных уравнений от обычных уравнений?

Дифференциальным называют уравнение, связывающее аргумент «x», искомую функцию y=f(x), её производные y′, y″…, y(n) или дифференциалы dy, d2y, … d(n)y.

Дифференциальное уравнение в общем виде можно записать:

$$F(x, y, y', y'', y''', ..., y^{(n)}) = 0$$

$$F(x, dy, d^2y, d^3y, ..., d^{(n)}y) = 0$$

Если искомая функция y=f(x) зависит от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называют обыкновенным: $y' = 4x^3$

От чего зависит порядок дифференциального уравнения?

Порядком дифференциального уравнение называется порядок наивысшей производной или дифференциала, входящих в уравнение.

$y' = 4x^3 + 3 - \textit{первого порядка}$

$y'' + 4y' - y = 0 - \textit{второго порядка}$

$y''' = \sin(x) \ - \textit{третьего порядка}$

Если правая часть дифференциального уравнения равняется нулю, то такое уравнение называется однородным. Если правая часть не равняется нулю, то уравнение называется неоднородным. В чем отличие решение дифференциального уравнения от решения простого уравнения? Общим решением дифференциального уравнения называется функция y=f(x,C),от «x» с произвольными постоянными «C», обращающая это уравнение в тождество. Общее решение записанное в неявном виде Ф(x,y,C)=0 называется общим интегралом.

Общее решение записанное в неявном виде Ф(x,y,C)=0 называется общим интегралом.

Чтобы найти частное решение, необходимо подбирать начальные условия. Подставив начальные условия (x, y, y′) в общее решение, определяется значение произвольных постоянных «C» дифференциального уравнения.

Затем, подставив значение произвольных постоянных в общее решение, получим функцию, которая называется частным решением

Виды дифференциальных уравнений:

1. Дифференциальным уравнением первого порядка с разделяющимися переменными, называется уравнение вида: $f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0$ Для решения таких уравнений необходимо:

1) Разделить переменные: $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \dfrac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0$

Это дифференциальное уравнение с разделенными переменными.

2) Интегрировать обе части дифференциального уравнения с разделенными переменными:

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C$$

3) Полученная в результате интегрирования функция называется общим решением данного дифференциального уравнения.

Пример:

$$y' = y^2 \cos x \qquad \int \frac{dy}{y^2} = \int \cos x dx \Rightarrow \int y^{-2} dy = \int \cos x dx$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \qquad -y^{-1} = \sin x + C$$

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x dx \qquad \frac{1}{y} = -\sin x + C \; - \; \textit{общее решение}$$

2. Линейными дифференциальными уравнениями первого порядка называются уравнения вида:

$$y' + p(x)y = f(x)$$

Решение таких уравнений находится с помощью произведения двух независимых функций y=uv,где u=u(x) v=v(x).

Для решения уравнения:

1) необходимо определить первую производную $y' = u'v + uv'$ от функции y=uv.

2) Подставить значение функции и производной в основное уравнение.

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x)$$

3) Из 2-го и 3-го слагаемого вынести переменную «u» за скобки.

$$u'v + u(v' + p(x)v) = f(x)$$

4) Приравнивая к нулю второе слагаемое, определяем значение функции «v».

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 \\ u'v = f(x) \end{cases}$$

$$v' = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$$

$$\frac{dv}{v} = -p(x)dx$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$$

$$\ln v = -\int p(x)dx$$

$$v = e^{-\int p(x)dx}$$

5) Подставляя найденное значение «v» в уравнение, определяем значение функции «u».

$$u'v = f(x)$$

$$u' = \frac{f(x)}{e^{-\int p(x)dx}}$$

$$u' = f(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$u = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$$

6) Решение уравнения: $y = uv = e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx$

Дифференциальные уравнения второго порядка допускающие понижение порядка:

Дифференциальное уравнение вида: F(x, y, y', y'') = 0, в которое входит вторая производная неизвестной функции y = f(x), называют дифференциальным уравнением второго порядка.

Дифференциальное уравнение второго порядка y'' = f(x, y, y') имеет общее решение y = φ(x, C1,C2), содержащее две произвольные постоянные.

Виды дифференциальных уравнений второго порядка допускающие понижение порядка:

1.1. Дифференциальные уравнения второго порядка не содержащие искомой функции и ее производной.

Уравнение вида y'' = f(x) называют дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащим искомой функции и ее производной. Такие уравнения решаются двукратным интегрированием с введением новой функции, дающей возможность понизить их порядок.

Введем новую функцию u(x), положив y' = u(x), тогда y'' = (y')' = u'(x), u'(x) = f(x) или du/dx = f(x). Разделив переменные и проинтегрировав, получим:

$$du = f(x)dx, \int du = \int f(x)dx, u(x) = \int f(x)dx + C_1$$

или

$$y' = \int f(x)dx + C_1, \frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C\ .$$

$$dy = (\int f(x)dx + C_1)dx,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\int dy = \int(\int f(x)dx + C_1)dx,$

$$y = \int(\int f(x)dx) + C\ x + C_2$$

- общее решение данного дифференциального уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения y'' = x.

Решение. Обозначим y' = u(x), тогда y''= u'(x) и u'(x) = x или du/dx = x. Разделив переменные и проинтегрировав, найдем первую производную:

$$du = xdx, \int du = \int xdx, u = \frac{x^2}{2} + C_1$$

или

$$y' = \frac{du}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Разделив в уравнении переменные и проинтегрировав его, найдем функцию y:

$$dy = \frac{x^2}{2}dx + C_1 dx, \int dy = \int \frac{x^2}{2}dx + \int C_1 dx.$$

Таким образом, y = x3/6 + C1x + C2 — общее решение уравнения, содержащее две произвольные постоянные C1, и C2.

1.2 Дифференциальные уравнения второго порядка не содержащие искомой функции:

Уравнение вида y'' = f(x,y') называют дифференциальным уравнением второго порядка, не содержащие искомой функции. Введя новую функцию y' =z(x), получим уравнение первого порядка порядка относительно z: z' = f(x, z).

Пример.

Найти общее решение уравнения: (1 + x2)y'' - 2xy' = 0.

Решение.

Обозначим y' = z(x), y'' = z'(x), тогда:

$$(1 + x^2)z' - 2xz = 0,$$

$$(1 + x^2)\frac{dz}{dx} - 2xz = 0$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dz}{z} = \frac{2x}{1+x^2}dx;$$

$$\int\frac{dz}{z} = \int\frac{2x}{1+x^2}dx:$$

$$\ln(z) = \ln(1+x^2) + \ln(C_1)$$

Потенцируем выражение: z=C1(1+x2). Так как z = y', то y'=C1(1+x2) или dy/dx = C1(1 + x2).
Разделив переменные и проинтегрировав, получим: dy = C1(l+x2)dx;

$$\int dy = \int C_1(1+x^2)dx$$

откуда y = C1 x3/3+ C1x+ C2 — общее решение данного уравнения.

2. Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами (p, q - const), называется уравнение вида: $y'' + py' + qy = 0$

Общее решение такого уравнения определяется с помощью функции Эйлера: y=ekx.

Для решения уравнения:

1) Необходимо определить от функции Эйлера (y=ekx) первую и вторую производные от этой функции:

$$y' = ke^{kx},$$

$$y'' = k^2e^{kx}$$

2) Полученные значения функции, первой и второй производной подставить в основное уравнение:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

3) Вынося функцию Эйлера за скобки и, учитывая, что она не равна нулю, записать выражение в скобках равное к нулю:

$$e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$$

$$e^{kx} \neq 0, k^2 + pk + q = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

Данное уравнение называется характеристическим уравнением однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$k^2 + pk + q = 0,$$

4) Определить корни характеристического уравнения: $k_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

5) Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами зависит от корней характеристического уравнения:

5.1 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения действительные и различные числа, то

$$D > 0, k_1 \neq k_2$$

общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$$

5.2 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения действительные и равные числа, то

$$D = 0, k_1 = k_2 = k$$

общее решение уравнения имеет вид:

$$y = e^{kx}(C_1x + C_2)$$

5.3 Если корни k1 и k2 характеристического уравнения комплексные или мнимые числа, то общее решение уравнения имеет вид:

$$D < 0, k_1 \neq k_2, k_{1/2} = \alpha + \beta i$$

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \qquad где: \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{D}, i = \sqrt{-1}.$$

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.
5. Литература: см. приложение №1
6. Контрольные вопросы:
1. Чем отличается частное решение дифференциального уравнения от общего?
2. Для какой цели используются дифференциальные уравнения в фармации?
3. Для какой цели используются дифференциальные уравнения второго порядка в фармации?

Лекция №10

1. Тема: Составление и решение дифференциальных уравнений на примерах задач физико-химического и фармацевтического содержания
2. Цель: Объяснить студентам теорию составления и решение дифференциальных уравнений на примерах задач физико-химического и фармацевтического содержания.
3. Тезисы лекции:
План лекции:
Прикладные задачи фармации, биологии и медицины:
1. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток.
2. Закон размножения бактерий с течением времени.
3. Закон роста клеток с течением времени.
4. Закон разрушения клеток в звуковом поле.
5. Составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий.

Дифференциальные уравнения занимают важное место в решении задач физико-химического, фармацевтического и медико-биологического содержания. Пользуясь ими, мы устанавливаем связь между переменными величинами, характеризующими данный процесс или явление.
Решение любой задачи с помощью математического анализа можно разбить на три этапа:
1. перевод условий задачи на язык математики;
2. решение задачи;
3. оценка результатов.
Первая часть работы обычно заключается в составлении дифференциального уравнения и является наиболее трудной, так как общих методов составления дифференциальных уравнений нет и навыки в этой области могут быть приобретены лишь в результате изучения конкретных примеров:
Прикладные задачи фармации, биологии и медицины:
1. Закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток:

Скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток пропорциональна количеству лекарственных форм вещества в таблетке. Установить зависимость изменения количества лекарственных форм вещества в таблетке с течением времени.
Обозначим через «m» количество вещества в таблетке, оставшееся ко времени растворения «t»: dm/dt = - km, где k — постоянная скорости растворения. Знак минус означает, что количество лекарственных форм вещества с течением времени убывает.

$$\frac{dm}{dt} = -kdt,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\int \frac{dm}{dt} = -\int kdt, \ln(m) = -kt + \ln(C),$

$$\ln(m) = \ln e^{-kt} + \ln(C),$$

$$m = Ce^{-kt}.$$

Полагая, что при t = 0, m = m0, получаем C = m0, следовательно: m = m0e-kt – закон растворения лекарственных форм вещества из таблеток.

2. Закон размножения бактерий с течением времени: Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий в данный момент. Установить зависимость изменения количества бактерий от времени.

Количество бактерий, имеющихся в данный момент, через «x». Тогда: dx/dt = kx, где «k» — коэффициент пропорциональности. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dx}{x} = kdt, \quad \int \frac{dx}{x} = k\int dt,$$

$$\ln(x) = kt + \ln(C), \quad \ln(x) - \ln(C) = kt$$

$$\ln(\frac{x}{C}) = kt, \frac{x}{C} = e^{kt}, x = Ce^{kt}$$

Полагая, что при t=0, x = x0, получаем C = x0, следовательно, x = x0ekt - Закон размножения бактерий с течением времени.

3. Закон роста клеток с течением времени:

Для палочковидных клеток, у которых отношение поверхности клетки к ее объему сохраняется постоянным, скорость роста клетки dL/dt пропорциональна длине клетки «L»: dL/dt = (α - β)L, где α, β - постоянные, характеризующие процессы синтеза и распада.

$$\frac{dL}{L} = (\alpha - \beta)dt,$$

$$\int \frac{dL}{L} = \int (\alpha - \beta)dt,$$

Разделим переменные и проинтегрируем: $\ln(L) = (\alpha - \beta)t + \ln(C),$

$$\ln(L) - \ln(C) = (\alpha - \beta)t$$

$$\ln(\frac{L}{C}) = (\alpha - \beta)t, \frac{L}{C} = e^{(\alpha-\beta)t}, L = Ce^{(\alpha-\beta)t}.$$

При t = 0, L= L0 постоянная C = L0, поэтому

L=L0e(a- βt) – закон роста палочковидных клеток с течением времени.

4. Закон разрушения клеток в звуковом поле:

Кавитация ультразвуковых волн проявляется в виде разрывов суспензионной среды и образования мельчайших пузырьков и пустот, плотность которых незначительна по сравнению с плотностью воды. Простейшие бактерии, водоросли, дрожжи, лейкоциты, эритроциты могут быть разрушены при кавитации, возникающей в интенсивном звуковом поле. Относительные скорости разрушения биологических клеток различных видов остаются постоянными в очень широком диапазоне частот.

Эти скорости могут характеризовать относительную хрупкость клеток различных видов. Чтобы выразить это количественно, нужно определить скорость разрушения клетки в постоянном звуковом поле. Изучение этого вопроса показывает, что, пока по крайней мере 1 % популяции остается неразрушенным, можно записать:

dN/dt = - RN, где «N» - концентрация клеток; «t» - время; «R» - постоянная.Разделим в уравнении переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dN}{N} = -Rdt,$$

$$\int \frac{dN}{N} = -\int Rdt,$$

$$\ln(N) = -Rt + \ln(C),$$

$$\ln(N) - \ln(C) = -Rt$$

$$\ln(\frac{N}{C}) = -Rt, \frac{N}{C} = e^{-Rt}, N = Ce^{-Rt}.$$

При t = 0, N = N0 и C = N0.
Тогда N = N0e-Rt - закон разрушение клеток в постоянном звуковом поле.
5. Составление и решение дифференциальных уравнений в теории эпидемий:
Рассмотрим, как составляются и решаются дифференциальные уравнения в теории эпидемий при условии, что изучаемое заболевание носит длительный характер. При этом процесс передачи инфекции значительно более быстрый, чем течение самой болезни, и зараженные особи не удаляются из колонии и передают при встречах инфекцию незараженным особям.
В начальный момент t = 0 «a» - число зараженных, «b» - число незараженных особей, x(t), y(t)— соответственно число зараженных и незараженных особей к моменту времени «t». В любой момент времени «t» для промежутка, меньшего времени жизни одного поколения, имеет место равенство
x + y = a + b.
При этих условиях нужно установить закон изменения числа незараженных особей с течением времени, т. е. найти y = f(t).
Так как инфекция передается при встречах зараженных особей с незараженными, то число незараженных особей будет убывать с течением времени пропорционально количеству встреч между зараженными и незараженными особями.
Для промежутка времени «dt» dy= - βxydt, откуда dy/dt = - βxy, где β - коэффициент пропорциональности. Подставив в это уравнение значение x=a+b-y, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: dy/dt = - βy(a + b - y).
После разделения дифференциалов и переменных в последнем уравнении, получим:

$$\frac{dy}{y(a+b-y)} = -\beta dt.$$

Преобразуем левую часть этого уравнения:

$$\frac{1}{a+b}(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y})dy = -\beta t,$$

$$\int \frac{1}{a+b}(\frac{1}{y} + \frac{1}{a+b-y})dy = -\int \beta t,$$

Интегрируем:

$$\frac{1}{a+b}\int \frac{dy}{y} + \frac{1}{a+b}\int \frac{dy}{a+b-y} = -\beta t + C,$$

$$\ln(y) - \ln(a+b-y) = -(a+b)\beta t + \ln(C),$$

$$\ln(\frac{y}{a+b-y}) = \ln(e^{-\beta(a+b)t}) + \ln(C),$$

$$\frac{y}{a+b-y} = Ce^{-\beta(a+b)t}.$$

$$C = \frac{b}{a},$$

При t = 0, y = b – найдем:

$$\frac{y}{a+b-y} = \frac{b}{a} e^{-\beta(a+b)t}.$$

Разрешая это уравнение относительно «у», получаем: $y(t) = \dfrac{b(a+b)}{b+ae^{\beta(a+b)t}}$

- закон убывания числа незараженных особей с течением времени.

4. Иллюстративный материал: Презентация, слайды.

5. Литература: см. приложение №1

6. Контрольные вопросы:

1. Как определяется скорость растворения лекарственных форм вещества из таблеток?
2. Из каких этапов состоит составление дифференциальных уравнений?

Приложение № 1.

Литература:

Основная:

1. Математика: учебник / И. В. Павлушков, Л. В. Розовский, И. А. Наркевич. - М.: ГЭОТАР-Медиа, 2013-320 с.
2. Рахимжанова С. К. Теория вероятностей и математическая статистика: учебно-методическое пособие/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023.- 188 с.
3. Рахимжанова С. К. Ықтималдықтар теориясы және математикалық статистика: оқу-әдістемелік құрал/ С. К. Рахимжанова, Д. С. Каратаева.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 184 бет.
4. Крофт, Э. Математика негіздері. 2-бөлім: оқулық.- Алматы: ҚР жоғары оқу орындарының қауымдастығы, 2014. - 324 бет.
5. Математика. 1-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев Алматы: Эверо, 2014. - 144 бет.
6. Математика. II-бөлім: оқулық / Қ. Ж. Құдабаев - Алматы: Эверо, 2014. - 176 бет.
7. Базарбекова А.А. Жоғары математика: оқулық/ Базарбекова А.А., Базарбекова А.Б.- Алматы: ЭСПИ, 2023.
8. Аширбаева Н.Қ. Жоғары математика курсының негіздері: оқу құралы.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 304 б.
9. Ахметова А.У. Математический анализ: учебное пособие/ Ахметова А.У., Каратаева Д.С.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 132 с.

Дополнительная:

1. Иванова М. Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера: монография/ М.Б. Иванова. - Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020. - 100 с.
2. Қаңлыбаев Қ.И. Математиканы оқыту әдістемесі оқулық/ Қ.И. Қаңлыбаев, О.С. Сатыбалдиев, С.А. Джанабердиева; ҚР БҒМ.- Алматы: Дәуір, 2013. - 368 бет
3. Искакова А.С. Решение задач теории вероятностей в системе Matlab: учебное пособие/ А.С. Искакова.- Алматы: ЭСПИ, 2023. - 204 с.

Электронные издания:

1. Иванова, М.Б. О базисности собственных и присоединенных функций несамосопряженных краевых задач для одномерного уравнения Шредингера [Электронный ресурс]: монография/ М.Б. Иванова.- Электрон. текстовые дан. (1,131 КБ).- Шымкент: Әлем баспаханасы, 2020.- 102
2. Математика, математиканы оқыту әдістемесі/ математика, методика преподования математики, оқу құралы.- Қарағанды 2017 https://aknurpress.kz/reader/web/1884
3. Математикалық анализ және аналитикалық функциялар теориясының бастамалары: оқу құралы. Қарағанды. 2015 https://aknurpress.kz/reader/web/1691
4. В.Р. Чудиновских, А.Ш. Каипова. Практические работы по высшей математике: учебное пособие. – Караганда: Издательство «АҚНҰР».– 2016. https://aknurpress.kz/reader/web/1109
5. Кощанова Г.Р. Математика 1: оқу құралы, -Алматы 2019. https://aknurpress.kz/reader/web/2080
6. Кошанова Г.Р. Математика 2: оқу құралы: Алматы 2019. https://aknurpress.kz/reader/web/2081
7. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С. Қыдырбаева. Математика. 1 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/2515/
8. Қ.Ж. Құдабаев, Г.С. Сарбасова, М.А. Иманбаева, А.С.Қыдырбаева. Математика. 2 бөлім: Оқулық. Алматы, Эверо, 2020. 144 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/1877/
9. Нурмағамбетов Д.Е. Медицинадағы жоғары математика негіздері: Оқу құралы/ Д.Е. Нурмағамбе-тов, М.О. Нурмағанбетова.- Алматы: «Эверо» баспасы, 2020. – 116 б. https://elib.kz/ru/search/read_book/711/
10. Құдабаев Қ.Ж. Матаматика: оқу құралы.– Алматы: Эверо, 2020.-136 б.

https://elib.kz/ru/search/read_book/3091/
11. Жұмабаев Қ.Ж. Жоғары математика (кеңістіктегі аналитикалық геометрия, анықтауыштар мен матрицалар, сызықтық теңдеулер): практикум / Қ.Ж. Жұмабаев, Р А. Жұмабаева.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2024.- 169 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/143330.html
12. Тестовые вопросы по теории вероятностей: учебно-методическое пособие / В. Д. Проценко, Е. А. Лукьянова, Т. В. Ляпунова [и др.].- Москва: РУДН, 2017.- 68 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/91081.html
13. Құралова Ұ.Ә. Жоғары математика негіздері: оқу құралы / Ұ.Ә. Құралова, Г.Е. Жидекұлова.- Тараз: Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, 2019.- 256 с. // IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/127267.html
14. Мальцева Ж.Л. Математика для студентов-медиков. В 4 частях. Ч.1. Начала линейной алгебры: учебное пособие / Ж. Л. Мальцева, С. В. Мальцева, О. В. Рязановская.- Новосибирск: НГУ, 2023.- 112 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/134642.html
15. Алдибаева Л.Т. Тізбектің және функцияның шегі: оқу құралы.- Алматы: Нур-Принт, 2014.- 129 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/67161.html
16. Куттыгожина А.С. Жоғары математика негіздері: оқулық.- Алматы, Москва: EDP Hub, Ай Пи Ар Медиа, 2025.- 212 с. //IPR SMART: https://www.iprbookshop.ru/149969.html
17. Matthew A. Rewald, Bradley A. Lorang, Garrett E. Schramm. Pharmacy Calculations: An Introduction for Pharmacy Technicians: An Introduction for Pharmacy Technicians.- [Place of publication not identified] : ASHP.- 2021. // eBook Medical Collection EBSCO